ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATHÉMATIQUES · SPÉCIALITÉ · PREMIÈRE · SUJET N°3

Corrigé – Sujet d'entraînement n°3

2 heures · Calculatrice non autorisée · 20 points

Première partie – Automatismes QCM

(6 pts)

Question 1

$$N = \frac{6 \times 10^9}{4 \times 10^3} = \frac{6}{4} \times 10^{9-3} = 1{,}5 \times 10^6$$

RÉPONSE

Réponse **B** : $N = 1{,}5 \times 10^6$

Question 2

Les $\frac{2}{3}$ des habitants ont une voiture, et parmi eux $\frac{3}{5}$ ont une voiture électrique :

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

RÉPONSE

Réponse **C** : $\dfrac{2}{5}$ des habitants possèdent une voiture électrique.

Question 3

Coefficient multiplicateur global : $1{,}25 \times 0{,}80 = 1{,}00$.

RÉPONSE

Réponse **B** : le salaire final **n'a pas changé** par rapport au salaire initial.

Question 4

$$E = R \cdot I^2 \cdot t \implies I^2 = \frac{E}{Rt} \implies I = \sqrt{\frac{E}{Rt}}$$ (on retient la racine positive, $I \geqslant 0$).

RÉPONSE

Réponse **A** : $I = \sqrt{\dfrac{E}{Rt}}$

Question 5

RAPPEL DE COURS

$P(C) = P(A) \cdot P_A(C) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(C)$

$$P(C) = 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}18 + 0{,}07 = 0{,}25$$

RÉPONSE

Réponse **C** : $P(C) = 0{,}25$

Question 6

$$\begin{aligned}(2x+3)(2x-3)-(x-1)^2 &= 4x^2-9-(x^2-2x+1)\\ &= 4x^2-9-x^2+2x-1\\ &= 3x^2+2x-10\end{aligned}$$

RÉPONSE

Réponse **A** : $3x^2+2x-10$

Question 7

$3x-2y+6=0 \implies y=\dfrac{3}{2}x+3$ donc l'ordonnée à l'origine vaut 3.

RÉPONSE

Réponse **C** : l'ordonnée à l'origine est 3.

Question 8

$f(x)=(-x+4)(3x+6)=0 \implies -x+4=0$ ou $3x+6=0 \implies x=4$ ou $x=-2$.

RÉPONSE

Réponse **C** : f s'annule pour $x=4$ et $x=-2$.

Question 9

$$4-3x \geqslant x+12 \implies -3x-x \geqslant 12-4 \implies -4x \geqslant 8 \implies x \leqslant -2$$

RÉPONSE

Réponse **B** : $S =]-\infty\,;-2]$

Question 10

On pose la condition : $\dfrac{8\times 3+12\times k+16\times 2}{3+k+2}=11$

$$\frac{56+12k}{5+k}=11 \implies 56+12k=55+11k \implies k=-1$$

Un coefficient ne peut pas être négatif : aucune valeur de k entier positif ne convient.

RÉPONSE

Réponse **D** : **Impossible** (la valeur $k=-1$ n'est pas acceptable comme coefficient).

Question 11

Soit r la raison. On a $u_7=u_3+4r$, donc $19=7+4r \implies r=3$.

$$u_0=u_3-3r=7-9=-2$$

RÉPONSE

Réponse **B** : $u_0=-2$

Question 12

RAPPEL DE COURS

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \cos(60) = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

RÉPONSE

Réponse **A** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$

Deuxième partie – Exercices

(14 pts)

Exercice 1 – Propagation d'une maladie (7 points)

Partie A – Modélisation par une suite géométrique

1. Le nombre de nouveaux cas chaque semaine est 60 % du nombre de la semaine précédente, donc :

$$u_{n+1} = 0{,}6\,u_n$$

La suite est **géométrique** de raison $q = 0{,}6$ et de premier terme $u_0 = 200$.

RÉPONSE

(u_n) géométrique de raison $q = 0{,}6$,et de terme initial $u_0 = 200$.

2. La forme explicite d'une suite géométrique est :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n$$

RÉPONSE

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 200 \times 0{,}6^n$

3.

$$u_5 = 200 \times 0{,}6^5 = 200 \times 0{,}07776 = 15{,}552$$

RÉPONSE

$u_5 = 200 \times 0{,}6^5 \approx$ **16** malades.

4.

RÉPONSE

n	0	1	2	3	4	5
u_n	200	120	72	43	26	16

($u_1 = 120,\ u_2 = 72,\ u_3 = 43{,}2 \approx 43,\ u_4 = 25{,}9 \approx 26,\ u_5 \approx 16$)

5. Puisque $0 < q = 0{,}6 < 1$, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}6 < 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < u_n$$

La suite est donc **strictement décroissante**.

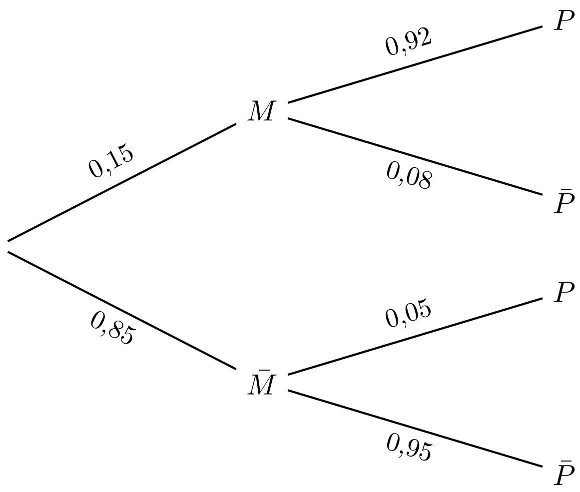
De plus, $u_n = 200 \times 0{,}6^n$ et $0{,}6^n \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc :

RÉPONSE

La suite (u_n) est strictement décroissante. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: le nombre de malades tend vers 0 (l'épidémie s'éteint).

Partie B – Dépistage et probabilités

6. Arbre de probabilités :



7.

$$P(M \cap P) = P(M) \times P_M(P) = 0{,}15 \times 0{,}92 = 0{,}138$$

RÉPONSE

$P(M \cap P) = 0{,}138$.
Interprétation : environ 13,8 % des personnes de la région sont à la fois malades **et** testées positives.

8. Par la formule des probabilités totales :

$$P(P) = P(M \cap P) + P(\bar{M} \cap P) = 0{,}15 \times 0{,}92 + 0{,}85 \times 0{,}05 = 0{,}138 + 0{,}0425 = 0{,}1805$$

RÉPONSE

$P(P) = 0{,}1805$.
Interprétation : environ 18 % des personnes de la région obtiennent un test positif, que ce soit à juste titre ou non (faux positifs inclus).

9.

RAPPEL DE COURS

$$P_P(M) = \frac{P(M \cap P)}{P(P)}$$

$$P_P(M) = \frac{0{,}138}{0{,}1805} \approx 0{,}765$$

RÉPONSE

$P_P(M) \approx 0{,}765$.
Commentaire : si une personne est testée positive, elle a environ 76,5 % de chances d'être réellement malade. Bien que le test soit assez fiable, il reste tout de même environ 23,5 % de faux positifs parmi les personnes testées positives.

Partie C – Croisement

10. À la semaine $n = 3$, on a $u_3 \approx 43$ malades dans la région.

On cherche le nombre de personnes qui sont malades **et** testées positives parmi u_3 personnes choisies au hasard. La probabilité d'être malade et positif est $P(M \cap P) = 0{,}138$.

$$43 \times 0{,}138 = 5{,}934$$

RÉPONSE

On peut s'attendre à trouver environ **6 personnes** à la fois malades et testées positives.

Exercice 2 – Trajectoire d'un projectile (7 points)

La hauteur est : $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 10$, définie pour $x \geqslant 0$.

Partie A – Analyse de la trajectoire

1.

$$h(0) = -\frac{1}{2} \times 0 + 3 \times 0 + 10 = 10$$

RÉPONSE

La hauteur de la falaise est **10 mètres**.

2. On met $h(x)$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) + 10 = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10 \\ &= -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2} + 10 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{29}{2} \end{aligned}$$

RÉPONSE

$h(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{29}{2}$

Le sommet est $S\left(3\,;\,\frac{29}{2}\right) = S(3\,;\,14{,}5)$.

Interprétation physique : à 3 m de distance horizontale du point de lancement, l'objet atteint son altitude maximale de 14,5 m.

3. On résout $h(x) = 0$:

$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 10 = 0 \implies x^2 - 6x - 20 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 36 + 80 = 116$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{29}}{2} = 3 \pm \sqrt{29}$$

Comme $x \geqslant 0$ et $\sqrt{29} > 0$, seule la solution positive est retenue :

RÉPONSE

$x_0 = 3 + \sqrt{29}$

(On a $x_0 \approx 8{,}39$ m.)

4. Tableau de signes de $h(x)$ sur $[0\,;x_0]$:

x	0	$x_0 = 3 + \sqrt{29}$
$h(x)$	$+ \quad + \quad \cdots \quad +$	0

RÉPONSE

$h(x) > 0$ sur $]0\,;x_0[$ et $h(x_0) = 0$.

Cohérence : l'objet est au-dessus du sol (hauteur positive) pendant toute sa trajectoire, puis touche le sol en $x_0 = 3 + \sqrt{29} \approx 8{,}39$ m.

Partie B – Dérivée et variations

5. h est un polynôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et en particulier sur $[0\,;x_0]$.

$$h'(x) = -x + 3$$

RÉPONSE

$h'(x) = -x + 3$

6. Tableau de variations : $h'(x) = 0 \iff x = 3$.

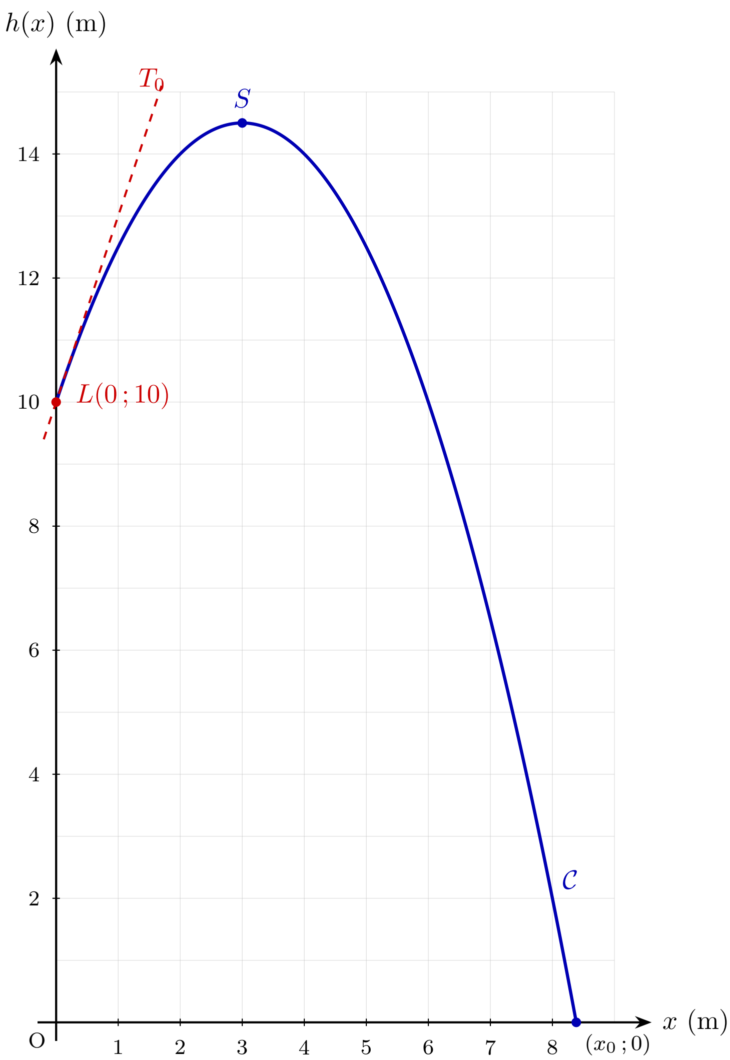
x	0		3		x_0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	10	$\nearrow$	$\frac{29}{2}$	$\searrow$	0

7. $h'(3) = 0$: la tangente est horizontale en $x = 3$.

RÉPONSE

La trajectoire est momentanément horizontale au point de sommet $S(3\,;\,\frac{29}{2})$.
Physiquement : c'est le point de hauteur maximale, où l'objet ne monte plus et commence à descendre. Ce résultat est **cohérent avec la question 2** qui donne le même sommet $S(3\,;\,\frac{29}{2})$ par la forme canonique.

Partie C – Tangentes et lecture graphique



8. La tangente T_0 en $L(0\,;10)$ a pour pente $h'(0) = -0 + 3 = 3$ et passe par $(0\,;10)$, donc :

RÉPONSE

Équation de T_0 : $y = 3x + 10$
(Lecture graphique : la tangente intercepte l'axe des ordonnées en 10 et monte de 3 unités par unité horizontale.)

9. Au sommet S, la dérivée s'annule : $h'(3) = 0$. La tangente est donc horizontale.

RÉPONSE

Équation de la tangente en S : $y = \dfrac{29}{2} = 14{,}5$
Justification : $h'(3) = 0$ donc la pente est nulle et la tangente est une droite horizontale passant par l'ordonnée du sommet.

10a.
Pente de T_0 : $h'(0) = 3$. Pente de Δ : 2.

RÉPONSE

Note : les pentes de T_0 (pente $= 3$) et de Δ (pente $= 2$) sont **différentes** ; T_0 et Δ ne sont donc pas parallèles. Il s'agit vraisemblablement d'une coquille dans l'énoncé.

10b. On cherche le point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à Δ, c'est-à-dire de pente 2.

$$h'(x) = 2 \implies -x + 3 = 2 \implies x = 1$$
$$h(1) = -\frac{1}{2} + 3 + 10 = \frac{25}{2} = 12{,}5$$

RÉPONSE

La tangente à $\mathcal{C}$ parallèle à Δ est en $\left(1\,;\,\dfrac{25}{2}\right)$.
Son équation : $y = 2(x-1) + \dfrac{25}{2} = 2x + \dfrac{21}{2}$

