CORRECTION DÉTAILLÉE

Épreuve de Mathématiques – Première Générale (Spécialité)

Calculatrice interdite – Raisonnement détaillé pas à pas

PARTIE A : QCM

Question 1 – Simplification d'une expression exponentielle

On cherche à simplifier $\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}}$.

La règle fondamentale est : $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
On soustrait simplement les exposants.

On applique la règle :

$$\frac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{2x-(x+1)} = e^{2x-x-1} = e^{x-1}.$$

Réponse

Réponse a. $\dfrac{e^{2x}}{e^{x+1}} = e^{x-1}$

Question 2 – Points d'intersection de deux paraboles

On cherche les points d'intersection des courbes $y = 17x^2 - 26x + 9$ et $y = 19x^2 - 22x + 10$. Aux points d'intersection, les ordonnées sont égales, donc on résout :

$$17x^2 - 26x + 9 = 19x^2 - 22x + 10.$$

On passe tout dans le membre de gauche :

$$17x^2 - 26x + 9 - 19x^2 + 22x - 10 = 0,$$

$$-2x^2 - 4x - 1 = 0,$$

ou de manière équivalente, en multipliant par -1 :

$$2x^2 + 4x + 1 = 0.$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 2 \times 1 = 16 - 8 = 8 > 0.$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet **deux solutions réelles distinctes**, donc les deux courbes ont **deux points d'intersection**.

Réponse

Réponse c. Les deux courbes ont deux points d'intersection.

Question 3 – Sommet et axe de symétrie d'une parabole

On considère la parabole d'équation $y = 3x^2 - 9x + 5$.

Pour une parabole $y = ax^2 + bx + c$, l'abscisse du sommet est $x_S = -\dfrac{b}{2a}$.
L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = x_S$.
L'ordonnée du sommet est $y_S = f(x_S)$.

Ici $a = 3$, $b = -9$, $c = 5$. On calcule :

$$x_S = -\frac{-9}{2 \times 3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

On calcule ensuite l'ordonnée du sommet :

$$y_S = 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 \times \frac{3}{2} + 5 = 3 \times \frac{9}{4} - \frac{27}{2} + 5 = \frac{27}{4} - \frac{54}{4} + \frac{20}{4} = \frac{27 - 54 + 20}{4} = -\frac{7}{4}.$$

L'axe de symétrie est la droite verticale passant par le sommet, d'équation $x = \dfrac{3}{2}$.

Réponse

Réponse a. $S\left(\dfrac{3}{2}\,;\,-\dfrac{7}{4}\right)$ et $\Delta : x = \dfrac{3}{2}$.

Question 4 – Vecteur normal à une droite

La droite d a pour équation cartésienne $3x + 2y + 4 = 0$.

Pour toute droite d'équation $ax + by + c = 0$, le vecteur $\binom{a}{b}$ est un **vecteur normal** à cette droite.

Ici $a = 3$ et $b = 2$, donc un vecteur normal est $\binom{3}{2}$.

Réponse

Réponse c. $\binom{3}{2}$ est un vecteur normal à la droite d.

Question 5 – Plus petit entier naturel tel qu'une somme dépasse 5000

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $1 + 2 + 3 + \cdots + n > 5000$.

La somme des n premiers entiers est donnée par la formule :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On veut donc $\dfrac{n(n+1)}{2} > 5000$, soit $n(n+1) > 10\,000$.
On teste la valeur proposée $n = 100$:

$$100 \times 101 = 10\,100 > 10\,000. \quad \checkmark$$

On vérifie que $n = 99$ ne convient pas :

$$99 \times 100 = 9\,900 < 10\,000. \quad \times$$

Donc le plus petit entier naturel n est bien $n = 100$.

Réponse

Réponse d. Le plus petit entier est $n = 100$.

Question 6 – Résolution d'une inéquation du second degré

On résout $-3(x-2)(x+1) > 0$.
On commence par diviser les deux membres par -3, ce qui **inverse le sens de l'inégalité** :

$$(x-2)(x+1) < 0.$$

Point de vigilance

Diviser par un nombre **négatif** inverse le sens de l'inégalité !

On dresse le tableau de signes. Les racines sont $x = -1$ et $x = 2$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le produit $(x-2)(x+1)$ est strictement négatif sur $]-1\,;\,2[$.

Réponse

Réponse c. L'ensemble des solutions est $]-1\,;\,2[$.

Question 7 – Trigonométrie : simplification de $\cos(x + 3\pi)$

On utilise les propriétés de la fonction cosinus.

La fonction cosinus est 2π-périodique : $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$.
De plus : $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

On décompose :

$$\cos(x + 3\pi) = \cos\big(x + 2\pi + \pi\big) = \cos(x + \pi) = -\cos(x).$$

Réponse

Réponse b. $\cos(x + 3\pi) = -\cos(x)$.

Question 8 – Norme d'une différence de vecteurs

On a $\vec{u} = \binom{-1}{0}$ et $\vec{v} = \binom{-3}{4}$ dans un repère orthonormé.
On calcule d'abord les coordonnées de $\vec{u} - \vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 - (-3) \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Puis on calcule la norme :

$$\| \vec{u} - \vec{v} \| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}.$$

Réponse

Réponse d. $\| \vec{u} - \vec{v} \| = 2\sqrt{5}$.

Question 9 – Équation trigonométrique $\sin(x) = \frac{1}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$

On sait que $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.
Sur $[0\,;\,\pi]$, la seconde solution est $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.
(La fonction sinus est positive sur $]0\,;\,\pi[$ et symétrique par rapport à $x = \frac{\pi}{2}$.)

Les deux solutions sur $]-\pi\,;\,\pi]$ sont $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

On vérifie qu'il n'y a pas d'autre solution : $\sin(x) = \frac{1}{2} > 0$, donc x doit être dans $]0\,;\,\pi[$, ce qui élimine toute solution négative.

Réponse

Réponse d. Les solutions sont $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

PARTIE B : RAISONNEMENT ET PROBLÈMES

Exercice 1 – Étude d'une fonction polynomiale

On considère $f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a. – Factorisation de $f(x)$

On veut montrer que $f(x) = (x-1)(8x^2 + 2x + 2)$**.**
La méthode consiste à développer le membre de droite et à vérifier qu'on retrouve $f(x)$.
On développe $(x-1)(8x^2 + 2x + 2)$:

$$\begin{aligned}(x-1)(8x^2+2x+2) &= x \cdot (8x^2+2x+2) - 1 \cdot (8x^2+2x+2) \\ &= 8x^3 + 2x^2 + 2x - 8x^2 - 2x - 2 \\ &= 8x^3 + (2x^2 - 8x^2) + (2x - 2x) - 2 \\ &= 8x^3 - 6x^2 - 2.\end{aligned}$$

On retrouve bien $f(x)$. La factorisation est donc établie.

Point de vigilance

On ne factorise pas « à l'aveugle » : on **développe** la forme factorisée donnée et on vérifie qu'elle est égale à l'expression de départ.

1. b. – Point d'intersection avec l'axe des abscisses

La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points vérifiant $f(x) = 0$.
On utilise la factorisation établie à la question précédente :

$$f(x) = 0 \iff (x-1)(8x^2 + 2x + 2) = 0.$$

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. Donc :

$$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 8x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Premier facteur : $x - 1 = 0 \implies x = 1$.
Deuxième facteur : On calcule le discriminant de $8x^2 + 2x + 2$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 8 \times 2 = 4 - 64 = -60 < 0.$$

Comme $\Delta < 0$, le trinôme $8x^2 + 2x + 2$ n'a **pas de racine réelle** : il est toujours du même signe que le coefficient de x^2, c'est-à-dire toujours strictement positif.
Donc la seule solution est $x = 1$, et la courbe coupe l'axe des abscisses en un unique point :

$$A = (1\,;\,0).$$

2. a. – Calcul de la dérivée $f'(x)$

On dérive $f(x) = 8x^3 - 6x^2 - 2$ en utilisant les règles de dérivation usuelles ($x^n \to nx^{n-1}$) :

$$f'(x) = 8 \times 3x^2 - 6 \times 2x - 0 = 24x^2 - 12x.$$

On factorise par $12x$:

$$f'(x) = 12x(2x - 1).$$

2. b. – Tableau de variations de f

Pour dresser le tableau de variations, on étudie le signe de $f'(x) = 12x(2x-1)$.

Les racines de f' sont $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$ (car $2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$).

Tableau de signes de $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$12x$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On calcule les valeurs de f aux points critiques :

$$f(0) = 8(0)^3 - 6(0)^2 - 2 = -2,$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 8\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - 2 = 8 \times \tfrac{1}{8} - 6 \times \tfrac{1}{4} - 2 = 1 - \tfrac{3}{2} - 2 = -\tfrac{5}{2}.$$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est croissante sur $]-\infty\,; 0]$, décroissante sur $\left[0\,; \dfrac{1}{2}\right]$, puis croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,; +\infty\right[$.

3. – Le point $B\left(0\,; -\dfrac{5}{2}\right)$ appartient-il à la tangente en $x = \dfrac{1}{2}$?

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x_0 = \dfrac{1}{2}$ est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

On a calculé $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{5}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ (car $x = \dfrac{1}{2}$ est un point où la dérivée s'annule).

Donc l'équation de la tangente T est :

$$y = 0 \times \left(x - \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{2}.$$

La tangente T est la droite horizontale d'équation $y = -\dfrac{5}{2}$.

Vérification pour le point $B\left(0\,; -\dfrac{5}{2}\right)$:

Les coordonnées de B vérifient-elles l'équation de T ?

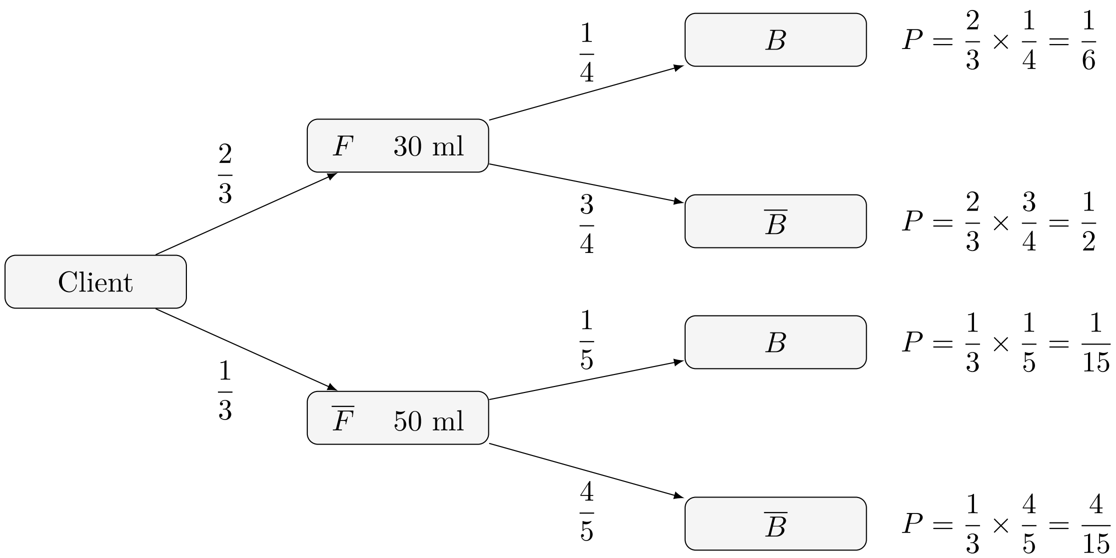
Pour $x = 0$: $y = -\dfrac{5}{2}$. Le point B a bien $y = -\dfrac{5}{2}$.

Réponse

Oui, le point $B\left(0\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$ appartient à la tangente T, car son ordonnée $-\dfrac{5}{2}$ est bien égale à $-\dfrac{5}{2}$, valeur de y sur la droite T en tout point.

Exercice 2 – Probabilités et variable aléatoire

1. – Arbre pondéré



Dans un arbre pondéré, les probabilités de chaque branche représentent des probabilités conditionnelles. Pour calculer la probabilité d'un chemin, on **multiplie** les probabilités le long de ce chemin.

2. – Calcul de $P(F \cap B)$

$F \cap B$ correspond au chemin « le client a acheté un flacon de 30 ml **et** un flacon Bois d'ébène ».

En lisant sur l'arbre :

$$P(F \cap B) = P(F) \times P_F(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

Réponse

$P(F \cap B) = \frac{1}{6}$

3. – Probabilité d'acheter un flacon Bois d'ébène

L'événement B peut se réaliser de deux manières exclusives :

— Le client a acheté 30 ml **et** Bois d'ébène : chemin $F \cap B$,

— Le client a acheté 50 ml **et** Bois d'ébène : chemin $\overline{F} \cap B$.

On applique la **formule des probabilités totales** :

$$P(B) = P(F \cap B) + P(\overline{F} \cap B).$$

On calcule $P(\overline{F} \cap B)$:

$$P(\overline{F} \cap B) = P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}.$$

Donc :

$$P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{15}.$$

On réduit au même dénominateur (le plus petit commun multiple de 6 et 15 est 30) :

$$P(B) = \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{7}{30}.$$

Réponse

$P(B) = \frac{7}{30}$

4. a. – Loi de probabilité de X

X est le montant total des achats d'un client. Les valeurs possibles de X dépendent de ce que le client achète :

Situation	**Valeur de X**	**Chemin**	**Probabilité**
30 ml seulement	40 €	$F \cap \overline{B}$	$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$
30 ml + Bois d'ébène	$40 + 25 = 65$ €	$F \cap B$	$\frac{1}{6}$
50 ml seulement	60 €	$\overline{F} \cap \overline{B}$	$\frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$
50 ml + Bois d'ébène	$60 + 25 = 85$ €	$\overline{F} \cap B$	$\frac{1}{15}$

Vérification : La somme des probabilités doit valoir 1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{15}{30} + \frac{5}{30} + \frac{8}{30} + \frac{2}{30} = \frac{30}{30} = 1. \quad \checkmark$$

Réponse

Loi de probabilité de X :

x_i	40	65	60	85
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

4. b. – Espérance de X

L'espérance se calcule par :

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i).$$

$$E(X) = 40 \times \frac{1}{2} + 65 \times \frac{1}{6} + 60 \times \frac{4}{15} + 85 \times \frac{1}{15}.$$

On réduit tout au dénominateur 30 (en utilisant le conseil du sujet : $15 \times 4 = 12 \times 5 = 60$) :

$$E(X) = \frac{40 \times 15}{30} + \frac{65 \times 5}{30} + \frac{60 \times 8}{30} + \frac{85 \times 2}{30} = \frac{600 + 325 + 480 + 170}{30} = \frac{1575}{30} = \frac{105}{2} = 52{,}5.$$

Réponse

$E(X) = 52{,}5$ €.
Interprétation : En moyenne, sur un grand nombre de clients achetant du parfum « Fleur Rose », chaque client dépense **52,50 euros** par visite en parfums.

Exercice 3 – Suite géométrique et déchets ménagers

On modélise la masse moyenne de déchets ménagers par habitant par une suite (d_n), avec $d_0 = 400$ kg et une réduction de 1,5 % par an à partir de 2019.

1. – Calcul de d_1 et interprétation

Une réduction de 1,5 % signifie que chaque année la masse est multipliée par $1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

Donc :

$$d_1 = d_0 \times 0{,}985 = 400 \times 0{,}985 = 4 \times 98,5 = 394.$$

Réponse

$d_1 = 394$ kg.
Interprétation : En 2019 (première année après la campagne de sensibilisation), la masse moyenne de déchets ménagers par habitant dans la commune est de 394 kg, contre 400 kg en 2018. La réduction a bien eu lieu.

2. a. – Nature de la suite (d_n)

Chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par la même constante 0,985 :

$$d_{n+1} = d_n \times 0{,}985 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le rapport entre deux termes consécutifs est constant. La suite (d_n) est donc une **suite géométrique** de :

— **premier terme** : $d_0 = 400$,

— **raison** : $q = 0{,}985$.

2. b. – Expression de d_n en fonction de n

Pour une suite géométrique de premier terme d_0 et de raison q :

$$d_n = d_0 \times q^n.$$

Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{d_n = 400 \times 0{,}985^n.}$$

3. a. – Année où la masse devient inférieure à 365 kg

D'après le tableau de valeurs fourni dans le sujet :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_n	400	394	388,09	382,27	376,53	370,89	365,32	359,84	354,45

On observe que :

— Pour $n = 6$: $d_6 = 365{,}32 \geq 365$. La masse est encore supérieure ou égale à 365 kg.

— Pour $n = 7$: $d_7 = 359{,}84 < 365$. La masse est pour la première fois inférieure à 365 kg.

Or $n = 7$ correspond à l'année $2018 + 7 = 2025$.

Réponse

C'est en **2025** que la masse moyenne de déchets ménagers par habitant deviendra pour la première fois inférieure à 365 kg (valeur nationale de référence).

3. b. – Fonction Python

On initialise la masse à 400 et on fait avancer l'année tant que la masse est supérieure ou égale à 365. À chaque itération, on multiplie par 0,985.

```
def annee_seuil():
    d = 400        # masse initiale en 2018
    n = 0          # on part de n = 0 (année 2018)
    while d >= 365:
        n = n + 1          # on passe à l'année suivante
        d = d * 0.985      # on réduit la masse de 1,5 %
    return 2018 + n        # on retourne l'année correspondante
```

La boucle `while` continue tant que la masse est **supérieure ou égale** à 365. Dès que la masse passe en dessous de 365, la boucle s'arrête et on retourne l'année correspondante. Ici, la fonction retournera `2025`.

Exercice 4 – Géométrie analytique et produit scalaire

On se place dans un repère orthonormé. On a $A(7\,;\,-2)$, $B(7\,;\,4)$ et $C(1\,;\,1)$.

1. – Équation de la droite (d_1) passant par C et perpendiculaire à (AB)

Étape 1 : Étudier la droite (AB).
Les points $A(7\,;\,-2)$ et $B(7\,;\,4)$ ont la **même abscisse** ($x = 7$). La droite (AB) est donc une droite **verticale**, d'équation $x = 7$.
Étape 2 : Trouver la perpendiculaire à (AB) passant par C.

Toute droite perpendiculaire à une droite verticale est une droite **horizontale** (d'équation $y = k$).

La droite (d_1) est horizontale et passe par $C(1\,;\,1)$, dont l'ordonnée est 1.
Donc l'équation de (d_1) est $y = 1$.

Réponse

Une équation de (d_1) est $y = 1$.

2. – Ce que représente (d_1) pour le triangle ABC

La droite (d_1) passe par C et est perpendiculaire à (AB) : c'est donc la **hauteur du triangle ABC issue du sommet C**.
Vérifions si (d_1) est aussi la médiatrice de $[AB]$.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{7+7}{2}\,;\,\frac{-2+4}{2}\right) = (7\,;\,1).$$

Le point $I(7\,;\,1)$ vérifie-t-il $y = 1$? Oui ! Donc (d_1) passe par le milieu de $[AB]$.
Ainsi (d_1) est à la fois perpendiculaire à $[AB]$ et passe par son milieu : c'est la **médiatrice de** $[AB]$.

Réponse

La droite (d_1) est la **hauteur** du triangle ABC issue de C, ainsi que la **médiatrice** du segment $[AB]$. Le triangle ABC est donc isocèle en C (car tout point de la médiatrice de $[AB]$ est équidistant de A et de B).

3. – Équation de la droite (d_2), hauteur issue de B

La hauteur issue de B est la droite passant par $B(7\,;\,4)$ et **perpendiculaire** à la droite (AC).
Étape 1 : Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$.

$A(7\,;\,-2)$ et $C(1\,;\,1)$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont :

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-7\\1+2\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$$

Étape 2 : Trouver le vecteur directeur de (d_2).

Une équation cartésienne de droite est de la forme $ax+by+c=0$ avec $\vec{u}\binom{-b}{a}$ un vecteur directeur et $\vec{n}\binom{a}{b}$ un vecteur normal à la droite.

La droite (d_2) est perpendiculaire à la droite (AC). Elle admet donc le vecteur $\overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal :

$$-6x+3y+c=0 \text{ avec } c \text{ un réel.}$$

Étape 3 : Détermination de c.
(d_2) passe par $B(7\,;\,4)$:

$$-6\times 7+3\times 4+c=0 \iff c=30$$

Réponse

Une équation de (d_2) est $-6x+3y+30=0$.
Ou encore, en simplifiant par 3 : $-2x+y+10=0$

4. – Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}$

Étape 1 : Trouver les coordonnées de H, intersection de (d_1) et (d_2).
(d_1) a pour équation $y=1$ et (d_2) a pour équation réduite $y=2x-10$.
On résout le système :

$$\begin{cases} y=1 \\ y=2x-10 \end{cases} \implies 1=2x-10 \implies 2x=11 \implies x=\frac{11}{2}.$$

Donc $H\left(\frac{11}{2}\,;\,1\right)$.

Étape 2 : Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

$$\overrightarrow{AH}\left(\frac{11}{2}-7\,;\,1-(-2)\right)=\left(-\frac{3}{2}\,;\,3\right).$$

$$\overrightarrow{CB}\,(7-1\,;\,4-1)=(6\,;\,3)\,.$$

Étape 3 : Calculer le produit scalaire.

Dans un repère orthonormé, si $\overrightarrow{u}=\binom{x_1}{y_1}$ et $\overrightarrow{v}=\binom{x_2}{y_2}$, alors :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=x_1x_2+y_1y_2.$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times 6 + 3 \times 3 = -9 + 9 = 0.$$

Réponse

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.
Justification géométrique : Ce résultat n'est pas un hasard. H est l'orthocentre du triangle ABC (intersection des hauteurs). La droite (AH) prolongée est la troisième hauteur, issue de A, qui est perpendiculaire à (BC). Or $\overrightarrow{CB}$ est colinéaire à (BC), et $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à la hauteur depuis A, qui est perpendiculaire à (BC). Deux vecteurs directeurs de droites perpendiculaires ont un produit scalaire nul, d'où $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.