ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Première Générale

EXERCICE 1 **(5 points)**

Question 1 :

On a $u_{n+1} = u_n - \frac{13}{100}u_n = u_n\left(1 - \frac{13}{100}\right) = u_n(1-0,13) = 0,87u_n$.
La relation $u_{n+1} = 0,87u_n$montre que la suite (u_n) est une suite géometrique de raison 0,87, de premier terme $u_0 = 100$.

Question 2 :

La loi de probabilité incomplète de la variable aléatoire X est donnée ci-dessous :
On a $E(X) = 0,2\times(-6)+0,1\times(-3)+0,2\times 0+0,4\times 3+0,1x_5 = 0,7$, soit $-1,2-0,3+1,2+0,1x_5 = 0,7$ ou $0,1x_5 = 1$, d'où $x_5 = 10$

Question 3 :

Soit f la fonction dérivable définie sur $\left]-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+7}$ et f' sa fonction dérivée.

Comme $x \neq -\dfrac{7}{3}$, $f(x)$ existe et est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables et sur $\left]-\dfrac{7}{3};+\infty\right[$:

$f'(x) = \dfrac{2(3x+7)-3(2x+3)}{(3x+7)^2} = \dfrac{6x+14-6x-9)}{(3x+7)^2} = \dfrac{5)}{(3x+7)^2}$.

Question 4 :

Soit a le prix initial de l'article. L'augmenter de 10 % c'est le multiplier par 1,10.
On a donc $a\times 1,10\times b = a$, soit en supposant le prix non nul $1,10b = 1$, d'où $b = \dfrac{1}{,1} \approx 0,909$
Or multiplier un prix par 0,909 c'est le baisser de $1-0,909 = 0,091$ soit environ 9 % (réponse **D.**

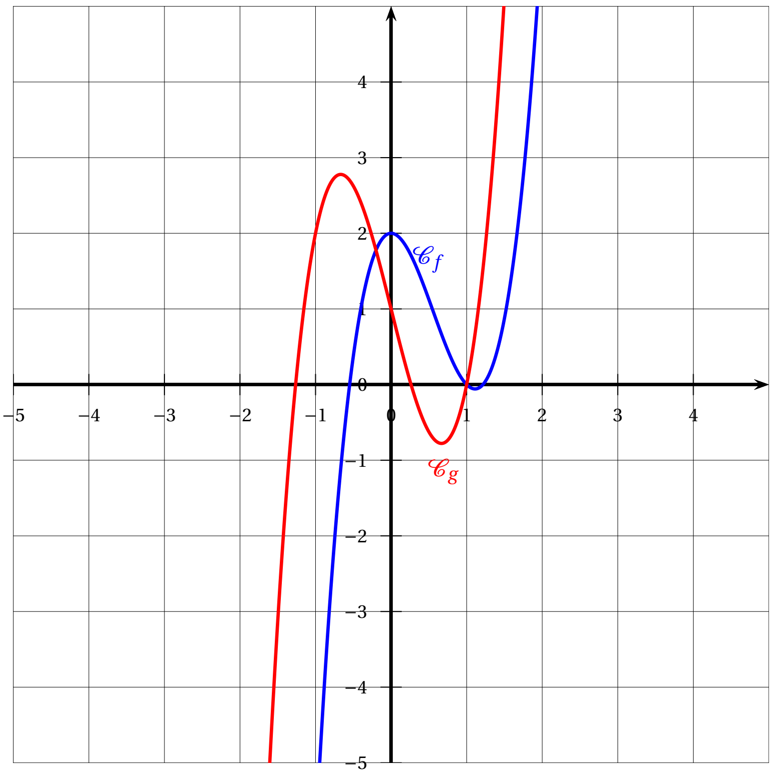
Question 5 :

Réponse : **C.**

Exercice 1 **5 points**

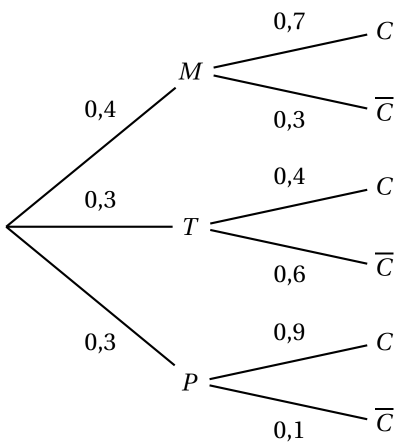
$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2.$$

1. On a sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3\times 3x^2 - 2\times 5x = 9x^2 - 10x = x(9x-10)$.
2. $y = f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$
   Avec $f(-1) = 3\times(-1)^3 - 5\times(-1)^2 + 2 = -3-5+2 = -6$ et $f'(-1) = -1\times(9\times(-1)-10) = -1\times(-19) = 19$, l'équation réduite devient :
   $y = 19(x+1) - 6$ ou $y = 19x + 13$.
3. $$g(x) = 3x^3 - 4x + 1.$$
   a. Pour tout réel x, $f(x)-g(x) = 3x^3-5x^2+2-\left(3x^3-4x+1.\right) = 3x^3-5x^2+2-3x^3+4x-1 = -5x^2+4x+1$.
   b. Pour le trinôme du second degré $f(x)-g(x)$, on a $\Delta = 4^2-4\times(-5)\times 1 = 16+20 = 36 = 6^2 > 0$. Il y a donc deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-4+6}{2\times(-5)} = \dfrac{2}{-10} = -\dfrac{1}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-4-6}{2\times(-5)} = \dfrac{-10}{-10} = 1$.
   c. On sait que le trinôme est négatif sauf entre les racines.
   Donc $f(x)-g(x) > 0$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{5}\,;\,1\right[$.
   La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ pour $-\frac{1}{5} < x < 1$.



EXERCICE 2 **(5 points)**

1.

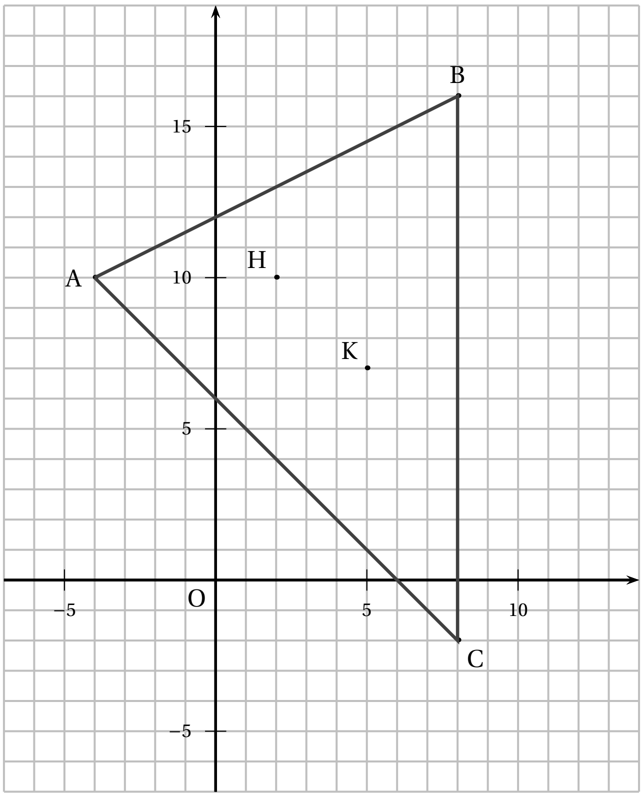


2. • $P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$.

• On a aussi : $P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. puis $P(P \cap C) = P(P) \times P_P(C) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$. D'après la loi des probabilités totales : $P(C) = P(T \cap C) + P(M \cap C) + P(P \cap C) = 0,12 + 0,28 + 0,27 = 0,67$.

3. Il faut trouver $P_C(T) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(C)} = \dfrac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0,12}{0,67} = \dfrac{12}{67}$.

EXERCICE 3 **(5 points)**



1. Avec $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{HC}}\begin{pmatrix}6\\-12\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{HC}} = 12\times 6+6\times(-12) = 72-72 = 0$.

De même avec $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}12\\-12\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{HB}}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{HB}} = 12\times 6+6\times(-12) = 72-72 = 0$.

2. On a donc (CH) est perpendiculaire à (AB) et (BH) est perpendiculaire à (AC). Les droites (CH) et (BH) sont donc deux hauteurs du triangle ABC : elles sont donc sécantes en H orthocentre du triangle et la troisième hauteur est la droite (CH)

3. On a $\text{KA}^2 = 9^2+(-3)^2 = 81+9 = 90$;

$\text{KB}^2 = 3^2+9^2 = 9+81 = 90$;

$\text{KC}^2 = (-3)^2+(-9)^2 = 9+81 = 90$.

Or $\text{KA}^2 = \text{KB}^2 = \text{KC}^2 = 90$ entraine $\text{KA} = \text{KB} = \text{KC} = R$. Le point K est équidistant de A, B et C : c'est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4. Avec M(8 ; 7), et avec G(g ; g') $\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}12\\-3\end{pmatrix}$, puis $\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AM}}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$.

On a donc $\overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{AG}}\begin{pmatrix}g+4\\g'-10\end{pmatrix}$.

O en déduit que $g = 8-4 = 4$ et $g' = 10-2 = 8$. Donc G(4 ; 8).

5. O a $\overrightarrow{\text{GH}}\begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{GK}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$.

On a donc de façon évidente $\overrightarrow{\text{GH}} = 2\overrightarrow{\text{GK}}$: les vecteurs sont colinéaires, les droites (GH) et (GK) sont parallèles mais ont le point G commun, donc les points G,H et K sont alignés.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Une entreprise produit du tissu.
Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.
Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.
On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Pour $x = 3$, l'entreprise reçoit $R(3) = 3 \times 680 = 2\,040$ (€).

   Le coût de productions de ces 3 kilomètres de tissu est :

   $C(3) = 5 \times 3^3 - 120 \times 3^2 + 500 \times 3 + 750 = 405 - 1\,080 + 1\,500 + 750 = 1\,575$.

   IL y a donc un bénéfice de $R(3) - C(3) = 2\,040 - 1\,575 = 465$ (€)

2. Pour $0 \leqslant x \leqslant 10$, on a :

   $B(x) = R(x) - C(x) = 680x - \left(15x^3 - 120x^2 + 500x + 750\right) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.

3. La fonction polynôme B est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0\,;\,10]$ et sur cet intervalle, on a :

   $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180 = 15\left(-3x^2 + 16x + 12\right)$.

4. D'après le résultat précédent, le signe de $B'(x)$ est celui du facteur $-3x^2 + 16x + 12$.

   Orpour ce trinôme : $\Delta = 16^2 - 4 \times (-3) \times 12 = 256 + 144 = 400 = (20)^2 > 0$, donc ce trinôme a deux racines :

   $$x_1 = \frac{-16+20}{-6} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-16-20}{-6} = 6.$$

   On sait que ce trinôme est négatif (signe de -3), sauf entre les racines.

5. On a $x_1 \approx -0,67$ et $x_2 = 6$. Comme B est croissante sur $\left[-\frac{2}{3}\,;\,6\right]$, la plus grande valeur de B est obtenue pour :

   $B(6) = -15 \times 6^3 + 120 \times 6^2 + 180 \times 6 - 750 = 1\,410$ (€).

   Elle doit produire 6 km de tissu.