

Corrigé

Épreuve anticipée de mathématiques — Première générale Métropole – Sujet de secours 2026

Baccalauréat Général — Session 2026 — avec enseignement de spécialité (26-MATSPEGEME2)

Première partie — Automatismes (QCM)

(6 pts)

RAPPEL

Douze questions, quatre propositions, une seule réponse correcte par question ; aucune justification n'est exigée le jour de l'épreuve. Les justifications ci-dessous sont fournies à titre pédagogique. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point : il ne faut donc jamais laisser une question sans réponse.

Question 1

Réponse a

On isole $\frac{1}{p'}$, puis on réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \iff \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{p+f}{fp} \iff p' = \frac{fp}{f+p}.$$

En passant aux inverses, le numérateur et le dénominateur s'échangent : les propositions b et c, qui gardent fp au dénominateur, sont les inverses de ce qu'il faut.

Question 2

Réponse d

On additionne les exposants au numérateur, puis on les soustrait :

$$\frac{2^5 \times 2^3}{2^7} = \frac{2^{5+3}}{2^7} = 2^{8-7} = 2^1 = 2.$$

La proposition b, 2^8 , est le seul numérateur ; la proposition a correspondrait à $2^{5 \times 3}$, c'est-à-dire à une puissance de puissance.

Question 3

Réponse c

Augmenter de 20 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur $1 + \frac{20}{100} = 1,2$:

$$80 \times 1,2 = 96.$$

La proposition d, 16 euros, n'est que le *montant* de la hausse et non le nouveau prix.

Question 4

Réponse c

Le coefficient directeur de la droite passant par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ vaut $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$:

$$a = \frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

La proposition b, 4, oublie de diviser par l'écart des abscisses.

Question 5

Réponse c

Il s'agit d'une proportion de proportion : on *multiplie* les deux taux. Un quart des demi-pensionnaires, qui représentent eux-mêmes 60 % des élèves :

$$\frac{1}{4} \times 0,60 = 0,25 \times 0,60 = 0,15 = 15 \, \%.$$

Question 6**Réponse a**

On remplace V et u par leurs valeurs, puis on isole t^2 :

$$20 = \frac{t^2}{5} \iff t^2 = 100 \iff t = 10 \text{ ou } t = -10.$$

Un carré égal à 100 admet bien *deux* solutions opposées : il ne faut pas oublier la valeur négative.

Question 7**Réponse d**

La droite est **croissante** : son coefficient directeur est positif, ce qui élimine d'emblée les propositions a et c. Elle coupe l'axe des ordonnées en -1 : l'ordonnée à l'origine est $b = -1$, ce qui élimine à nouveau a et c. Enfin elle passe par les points $(0; -1)$ et $(2; 2)$, d'où :

$$a = \frac{2 - (-1)}{2 - 0} = \frac{3}{2}.$$

Son équation réduite est donc $y = \frac{3}{2}x - 1$.

Question 8**Réponse c**

On extrait les carrés parfaits des racines avant de simplifier :

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}, \quad 2\sqrt{8} = 2\sqrt{4 \times 2} = 4\sqrt{2}.$$

D'où :

$$\frac{\sqrt{98} + 2\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 11.$$

Question 9**Réponse c**

Le produit $(2x - 4)(-x + 1)$ s'annule pour $x = 2$ et $x = 1$: les tableaux a et b, dont les valeurs remarquables sont -1 et -2 (et de surcroît rangées dans le désordre), sont à écarter. Il reste à choisir le bon ordre des signes : en développant, le terme de plus haut degré est $-2x^2$, donc le produit est **négatif** à l'extérieur des racines et positif entre elles. C'est bien la succession $-, +, -$ du tableau c.

Question 10**Réponse b**

On cherche les abscisses pour lesquelles la courbe est *au-dessus* de la droite horizontale d'équation $y = 1$. La courbe franchit cette hauteur sur la première bosse entre $x = -2$ et $x = -1$, puis sur la seconde entre $x = 3$ et $x = 5$.

L'inégalité $f(x) \geq 1$ étant *large*, les bornes sont incluses : les crochets doivent être fermés, ce qui élimine les propositions c et d. La proposition a est quant à elle doublement fautive : elle réunit des intervalles qui se chevauchent et elle écrit $[-\infty$, alors que l'infini n'est jamais une borne atteinte.

$$S = [-2; -1] \cup [3; 5].$$

Question 11**Réponse b**

L'effectif total vaut $10 + 6 + 4 + 6 + 4 = 30$. La médiane est la moyenne des 15^e et 16^e valeurs de la série ordonnée. Les effectifs cumulés croissants valent 10 pour la valeur 0, puis 16 pour la valeur 1 : les 15^e et 16^e valeurs sont donc toutes deux égales à 1.

La proposition c, 1,6, est la *moyenne* de la série, à ne pas confondre avec la médiane.

Question 12

Réponse c

On développe chaque proposition :

$$(2x - 1)(1 + 2x) = 4x^2 - 1, \quad (1 - 2x)^2 + 4x - 2 = 4x^2 - 4x + 1 + 4x - 2 = 4x^2 - 1,$$

$$4(x + 1)^2 - 5 - 8x = 4x^2 + 8x + 4 - 5 - 8x = 4x^2 - 1.$$

En revanche $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$: c'est le développement d'un carré, et non l'identité de la différence de deux carrés $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. C'est donc la proposition c qui n'est pas égale à $4x^2 - 1$.

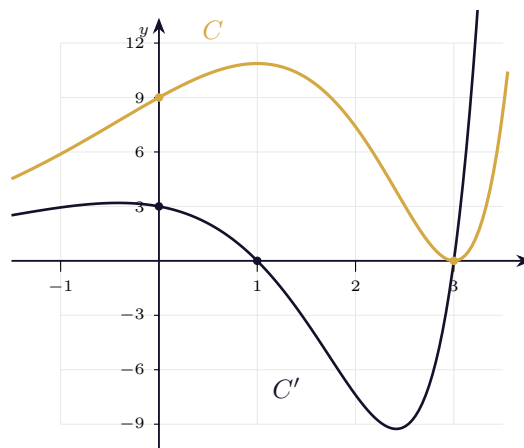
Deuxième partie — Exercice 1 — Une population de bactéries

(6 pts)

Partie A — Étude graphique

RAPPEL

Deux courbes C et C' de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; l'une est la dérivée de l'autre. La courbe C passe par $(0; 9)$ et est tangente à l'axe des abscisses en $(3; 0)$. La courbe C' passe par $(0; 3)$ et coupe l'axe des abscisses en $(1; 0)$ et $(3; 0)$.

1. La courbe C' représente bien la dérivée de la fonction représentée par C

MÉTHODE

Pour décider laquelle des deux courbes est la dérivée de l'autre, on confronte le *signe* de l'une au *sens de variation* de l'autre : une fonction est croissante là où sa dérivée est positive, et sa dérivée s'annule en changeant de signe là où elle admet un extremum.

Supposons un instant le contraire, c'est-à-dire que C représente la dérivée de la fonction représentée par C' . La courbe C est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses, qu'elle touche seulement en $(3; 0)$: cette dérivée serait alors positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction représentée par C' serait croissante sur $\mathbb{R}$. Or C' descend visiblement de l'ordonnée 3 jusqu'à son minimum, aux environs de $x = 2,4$: elle n'est pas croissante. L'hypothèse est donc à rejeter.

RÉPONSE

C'est bien C' qui représente la dérivée de la fonction représentée par C . Argument graphique : C est **positive ou nulle** sur $\mathbb{R}$, alors que la fonction représentée par C' est d'abord décroissante puis croissante ; C ne peut donc pas être la dérivée de C' . La lecture inverse est en revanche cohérente : C' s'annule en 1 et en 3, précisément là où C présente un maximum puis un minimum, et C' est négative entre 1 et 3, là où C décroît.

2. Équation de la tangente à C au point d'abscisse 0

MÉTHODE

L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$: il faut lire $f(0)$ sur la courbe C et $f'(0)$ sur la courbe C' , puisque C' représente f' .

La courbe C coupe l'axe des ordonnées en $(0; 9)$, donc $f(0) = 9$. La courbe C' coupe l'axe des ordonnées en $(0; 3)$, donc $f'(0) = 3$. L'équation de la tangente s'écrit alors :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 3x + 9.$$

RÉPONSE

Une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0 est $y = 3x + 9$.

Partie B — Évolution de la population de bactéries

RAPPEL

$f(t) = e^t(t^2 - 6t + 9)$ pour tout réel t , où t est le temps écoulé depuis le début de l'observation (en heures) et $f(t)$ la densité de population bactérienne, en milliers de bactéries par millilitre. Données : $e^1 \approx 2,7$ et $e^3 \approx 20,1$.

1. Factorisation de $f(t)$ et signe de f sur $\mathbb{R}$

MÉTHODE

On reconnaît dans $t^2 - 6t + 9$ l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = t$ et $b = 3$.

Pour tout réel t :

$$t^2 - 6t + 9 = t^2 - 2 \times t \times 3 + 3^2 = (t - 3)^2, \quad \text{donc} \quad f(t) = e^t(t - 3)^2.$$

Or, pour tout réel t , $e^t > 0$ et $(t - 3)^2 \geq 0$ en tant que carré : le produit est positif, et il ne s'annule que lorsque $(t - 3)^2 = 0$, c'est-à-dire pour $t = 3$.

RÉPONSE

Pour tout réel t : $f(t) = e^t(t - 3)^2$. La fonction f est donc **positive** sur $\mathbb{R}$, et ne s'annule qu'en $t = 3$. C'est cohérent avec le contexte : une densité de population ne peut pas être négative.

2. Calcul et interprétation de $f(0)$

$$f(0) = e^0(0^2 - 6 \times 0 + 9) = 1 \times 9 = 9.$$

RÉPONSE

$f(0) = 9$: à l'instant où l'antibiotique est introduit, la densité de population bactérienne est de 9 milliers de bactéries par millilitre, soit 9 000 bactéries par millilitre.

3. Démonstration de $f'(t) = e^t(t^2 - 4t + 3)$

MÉTHODE

f est un produit $u \times v$: on applique $(uv)' = u'v + uv'$, en se souvenant que la fonction $t \mapsto e^t$ est sa propre dérivée. On factorise ensuite par e^t .

On pose, pour tout réel t :

$$u(t) = e^t, \quad u'(t) = e^t, \quad v(t) = t^2 - 6t + 9, \quad v'(t) = 2t - 6.$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, et :

$$f'(t) = e^t (t^2 - 6t + 9) + e^t (2t - 6) = e^t [(t^2 - 6t + 9) + (2t - 6)].$$

On réduit le crochet : $t^2 - 6t + 9 + 2t - 6 = t^2 - 4t + 3$.

RÉPONSE

Pour tout réel t : $f'(t) = e^t (t^2 - 4t + 3)$.

4.a. Signe de f' sur $\mathbb{R}$

MÉTHODE

Comme $e^t > 0$ pour tout réel t , le signe de $f'(t)$ est exactement celui du trinôme $t^2 - 4t + 3$. On cherche ses racines, puis on applique la règle du signe du trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre elles.

Le discriminant du trinôme $t^2 - 4t + 3$ vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$; il admet donc deux racines :

$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3.$$

Ici $a = 1 > 0$: le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre elles.

t	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
e^t	+		+	+	
$t^2 - 4t + 3$	+	0	-	0	+
$f'(t)$	+	0	-	0	+

RÉPONSE

f' est **positive** sur $] -\infty ; 1]$ et sur $[3 ; +\infty[$, et **négative** sur $[1 ; 3]$. Elle s'annule en $t = 1$ et en $t = 3$.

4.b. Tableau des variations de f sur $[0 ; +\infty[$

Les images utiles se calculent à partir de la forme factorisée $f(t) = e^t(t - 3)^2$:

$$f(0) = 9, \quad f(1) = e^1 \times (1 - 3)^2 = 4e^1 \approx 4 \times 2,7 \approx 10,8, \quad f(3) = e^3 \times 0^2 = 0.$$

t	0	1	3	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	0	+
f	9	$4e^1 \approx 10,8$	0		

RÉPONSE

La densité augmente pendant la première heure, jusqu'à environ 10,8 milliers de bactéries par millilitre, puis décroît et s'annule au bout de 3 heures : l'antibiotique a alors détruit toute la population.

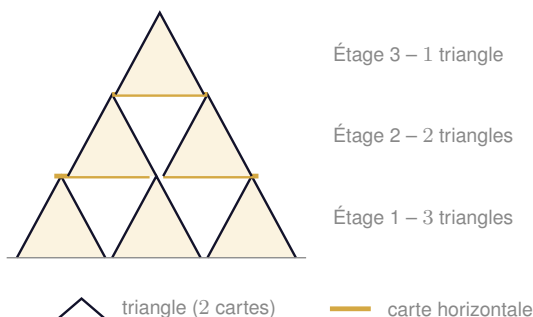
La fonction redevient croissante après $t = 3$: au-delà de cet instant, le modèle perd son sens biologique.

Deuxième partie — Exercice 2 — Le château de cartes

(4 pts)

RAPPEL

Un château à N étages : l'étage 1 est celui du bas. Le schéma correspond au cas $N = 3$; chaque triangle « pointe en haut » est formé de 2 cartes, et des cartes horizontales séparent deux étages consécutifs.

**1. Nombre de triangles « pointe en haut » à l'étage 1**

Sur le schéma, le château à $N = 3$ étages comporte 3 triangles à l'étage 1, 2 à l'étage 2 et 1 à l'étage 3 : on perd un triangle à chaque étage gagné.

RÉPONSE

L'étage 1 d'un château à N étages comporte N triangles « pointe en haut ».

2. Nombre total de triangles « pointe en haut » du château**MÉTHODE**

L'étage 1 compte N triangles, l'étage 2 en compte $N - 1$, et ainsi de suite jusqu'au dernier étage qui n'en compte qu'un seul. Le total est la somme des N premiers entiers, qui vaut $\frac{N(N+1)}{2}$.

$$1 + 2 + \dots + (N - 1) + N = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Pour $N = 3$, on retrouve bien $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ triangles, comme sur le schéma.

RÉPONSE

Un château à N étages nécessite $\frac{N(N+1)}{2}$ triangles « pointe en haut ».

3. Justification du nombre de cartes**MÉTHODE**

On compte séparément les deux sortes de cartes : celles qui forment les triangles (2 cartes par triangle) et les cartes horizontales posées entre deux étages consécutifs. Au-dessus de l'étage k , il faut autant de cartes horizontales qu'il y a de triangles à l'étage $k + 1$.

Cartes des triangles. Chaque triangle est constitué de 2 cartes, d'où :

$$2 \times \frac{N(N+1)}{2} = N(N+1) = N^2 + N \text{ cartes.}$$

Cartes horizontales. Elles supportent les étages 2, 3, ..., N, qui comportent respectivement N - 1, N - 2, ..., 1 triangles :

$$1 + 2 + \dots + (N - 1) = \frac{N(N - 1)}{2} = \frac{N^2 - N}{2} \text{ cartes.}$$

Total. On additionne les deux comptages en réduisant au même dénominateur :

$$N^2 + N + \frac{N^2 - N}{2} = \frac{2N^2 + 2N + N^2 - N}{2} = \frac{3N^2 + N}{2}.$$

RÉPONSE

Le nombre de cartes nécessaires pour construire un château à N étages est bien $\frac{3N^2 + N}{2}$. Pour N = 3 : $\frac{27 + 3}{2} = 15$ cartes, ce que l'on vérifie sur le schéma (6 triangles, soit 12 cartes, et 3 cartes horizontales).

4. Nombre maximal d'étages avec un paquet de 54 cartes

MÉTHODE

Le nombre d'étages est un entier : plutôt que de résoudre l'inéquation $\frac{3N^2 + N}{2} \leq 54$, on calcule le nombre de cartes pour des valeurs successives de N et on repère la dernière qui convient. Le nombre de cartes augmente avec N : dès qu'une valeur ne convient plus, aucune des suivantes ne conviendra.

N	1	2	3	4	5	6
Nombre de cartes	2	7	15	26	40	57

Pour N = 5 : $\frac{3 \times 25 + 5}{2} = \frac{80}{2} = 40 \leq 54$. Pour N = 6 : $\frac{3 \times 36 + 6}{2} = \frac{114}{2} = 57 > 54$.

RÉPONSE

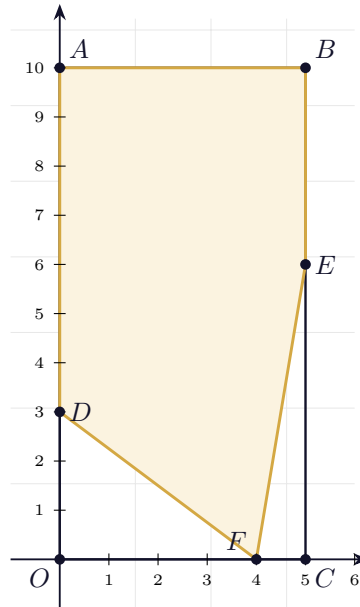
Avec un paquet de 54 cartes, le château peut comporter au maximum 5 étages : il faut alors 40 cartes, et 14 cartes restent inutilisées. Un sixième étage en exigerait 57, soit 3 de plus que le paquet n'en contient.

Deuxième partie — Exercice 3 — La scène de spectacle

(4 pts)

RAPPEL

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Le rectangle OABC modélise la scène vue de dessus ; le projecteur placé en F éclaire la partie du plan délimitée par le polygone ABEFD.

**1. Coordonnées des points****RÉPONSE**

$A(0; 10)$, $B(5; 10)$, $C(5; 0)$, $D(0; 3)$, $E(5; 6)$ et $F(4; 0)$.

2. La partie éclairée représente-t-elle plus de 80 % de la scène ?**MÉTHODE**

L'aire du polygone ABEFD ne se calcule pas directement : on retire à l'aire du rectangle celle des deux parties non éclairées, qui sont deux triangles rectangles (ODF et FCE). L'aire d'un triangle rectangle vaut la moitié du produit des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

L'aire de la scène est celle du rectangle OABC :

$$\mathcal{A}_{\text{scène}} = OA \times OC = 10 \times 5 = 50 \text{ unités d'aire.}$$

Les deux zones non éclairées sont les triangles ODF, rectangle en O avec $OD = 3$ et $OF = 4$, et FCE, rectangle en C avec $FC = 1$ et $CE = 6$:

$$\mathcal{A}_{\text{ODF}} = \frac{3 \times 4}{2} = 6, \quad \mathcal{A}_{\text{FCE}} = \frac{1 \times 6}{2} = 3.$$

D'où l'aire éclairée :

$$\mathcal{A}_{\text{ABEFD}} = 50 - 6 - 3 = 41 \text{ unités d'aire.}$$

On compare enfin cette aire à celle de la scène :

$$\frac{41}{50} = \frac{82}{100} = 0,82.$$

RÉPONSE

La partie éclairée représente 82 % de l'aire totale de la scène. Comme 82 % > 80 %, l'affirmation du visiteur est **exacte**.

3. Coordonnées de $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FE}$, et produit scalaire

MÉTHODE

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$ s'obtiennent par $\begin{pmatrix} x_D - x_F \\ y_D - y_F \end{pmatrix}$. Dans un repère orthonormé, le produit scalaire se calcule ensuite par $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$.

$$\overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 5 - 4 \\ 6 - 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = (-4) \times 1 + 3 \times 6 = -4 + 18 = 14.$$

4. Valeur exacte du cosinus de l'angle $\widehat{DFE}$

MÉTHODE

L'autre expression du produit scalaire fait intervenir l'angle : $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = FD \times FE \times \cos \widehat{DFE}$. Il reste à calculer les deux longueurs par $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$FD = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5, \quad FE = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}.$$

On isole le cosinus, puis on rend le dénominateur rationnel en multipliant par $\sqrt{37}$:

$$\cos \widehat{DFE} = \frac{\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}}{FD \times FE} = \frac{14}{5\sqrt{37}} = \frac{14\sqrt{37}}{5 \times 37} = \frac{14\sqrt{37}}{185}.$$

RÉPONSE

$$\cos \widehat{DFE} = \frac{14}{5\sqrt{37}} = \frac{14\sqrt{37}}{185} \approx 0,46, \text{ ce qui correspond à un angle d'environ } 63^\circ.$$

5. Construction à l'équerre du point M de [DF] tel que $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FM} = 14$

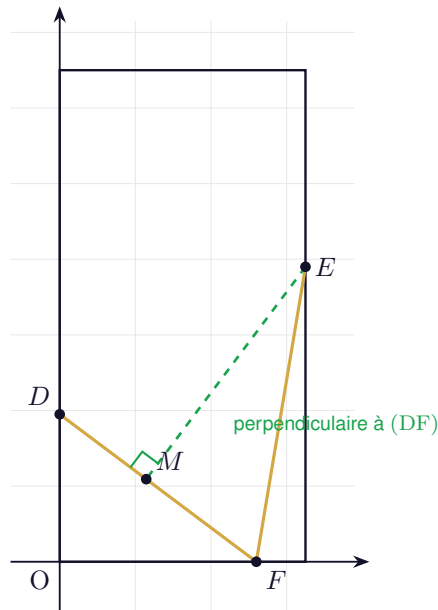
MÉTHODE

On compare la condition demandée au résultat de la question 3 : on veut $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FM} = 14 = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$. Or le produit scalaire $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$ est inchangé lorsqu'on remplace E par son **projeté orthogonal** sur la droite (DF) : c'est la propriété du produit scalaire par projection.

Notons M le projeté orthogonal du point E sur la droite (DF). Par définition de la projection orthogonale :

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FM} = 14.$$

Ce point M convient donc, et il appartient bien au segment [DF] comme le montre la figure ci-dessous.

**RÉPONSE**

Construction. On place un côté de l'angle droit de l'équerre le long du segment $[DF]$, puis on fait glisser l'équerre jusqu'à ce que l'autre côté passe par le point E ; on trace alors la perpendiculaire à (DF) passant par E . Le point M cherché est son point d'intersection avec $[DF]$, c'est-à-dire le projeté orthogonal de E sur (DF) .

Vérification. Comme M appartient à $[FD]$, les vecteurs $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont de même sens, donc $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FM} = FD \times FM = 5 FM$. L'égalité $5 FM = 14$ donne $FM = 2,8$, une longueur bien inférieure à $FD = 5$: le point M est bien situé sur le segment $[DF]$.