

Corrigé

Épreuve anticipée de Mathématiques

Baccalauréat Général — Spécialité Mathématiques

Amérique du Nord — Session 2026

Première partie — Automatismes (QCM)

(6 pts)

RAPPEL DE COURS

Aucune justification n'était demandée sur la copie. On présente ici le raisonnement complet pour chaque question.

Question 1

La priorité de la multiplication sur l'addition donne :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times 4 = \frac{1}{2} + \frac{12}{2} = \frac{1+12}{2} = \frac{13}{2}.$$

RÉPONSE

Réponse B : $\frac{13}{2}$.

Question 2

La partie visible représente 10 % du volume total V :

$$0,10 \times V = 150 \implies V = \frac{150}{0,10} = 1500.$$

RÉPONSE

Réponse B : le volume total est d'environ 1500 km^3 .

Question 3

Multiplier par un coefficient inférieur à 1 correspond à une *baisse*. Le coefficient multiplicateur d'une baisse de $t\%$ est $1 - \frac{t}{100}$:

$$1 - \frac{t}{100} = 0,845 \implies \frac{t}{100} = 0,155 \implies t = 15,5.$$

RÉPONSE

Réponse D : le prix a baissé de 15,5 %.

Question 4

$A(x) = (x+5)(x+8)$ est un produit de facteurs du premier degré, s'annulant en $x = -5$ et $x = -8$. C'est un polynôme du second degré de coefficient dominant positif : $A(x)$ est donc *positif* à l'extérieur des racines et *négatif* entre les racines (avec $-8 < -5$).

x	$-\infty$	-8	-5	$+\infty$
$x + 8$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 5$	$-$	$-$	0	$+$
$A(x)$	$+$	0	$-$	$+$

RÉPONSE

Réponse C : $A(x)$ est positif sur $] -\infty ; -8]$, négatif sur $[-8 ; -5]$, positif sur $[-5 ; +\infty[$.

Question 5

Le mot SINGE est formé des 5 lettres distinctes S, I, N, G, E . Parmi elles, les voyelles (A, E, I, O, U, Y) sont : I et E , soit 2 voyelles.

$$P_M(V) = \frac{\text{nb de voyelles dans SINGE}}{\text{nb de lettres de SINGE}} = \frac{2}{5}.$$

RÉPONSE

Réponse B : $P_M(V) = \frac{2}{5}$.

Question 6

La droite coupe l'axe des ordonnées en 30 : l'ordonnée à l'origine vaut 30. Elle coupe l'axe des abscisses en $x = 3$; le coefficient directeur est donc

$$a = \frac{0 - 30}{3 - 0} = -10.$$

Ainsi $f(x) = -10x + 30$.

RÉPONSE

Réponse C : $f(x) = -10x + 30$.

Question 7

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 - (1 - x)^2 &= (x^2 + 4x + 4) - (1 - 2x + x^2) \\ &= x^2 + 4x + 4 - 1 + 2x - x^2 = 6x + 3. \end{aligned}$$

RÉPONSE

Réponse B : $6x + 3$.

Question 8

$$2(x - 4) - (2x + 1) = 2x - 8 - 2x - 1 = -9.$$

L'équation devient $-9 = 0$, qui est impossible.

RÉPONSE

Réponse C : l'équation n'admet aucune solution.

Question 9

$$E = \frac{2 \times 3^2}{27 \times 2^3} = \frac{2 \times 9}{27 \times 8} = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}.$$

RÉPONSE

Réponse B : $E = \frac{1}{12}$.

Deuxième partie

(14 pts)

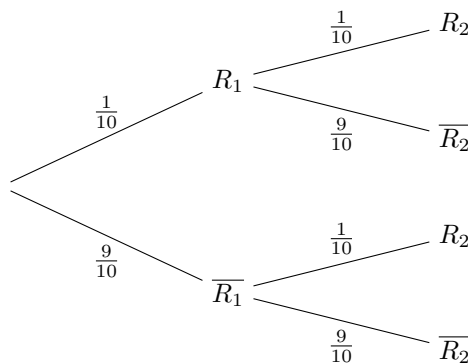
Exercice 1 (6 points)

Tirages avec remise : les deux tirages sont indépendants et de même loi.

Partie A — 1 boule rouge et 9 boules vertes

1. Arbre pondéré

À chaque tirage : $P(R) = \frac{1}{10}$ et $P(\bar{R}) = \frac{9}{10}$.

2.a. Valeurs prises par X

MÉTHODE

Le gain algébrique est : *somme reçue* – 1 de participation.

- deux rouges : reçoit 3 € \Rightarrow gain $3 - 1 = 2$;
- deux vertes : reçoit 1 € \Rightarrow gain $1 - 1 = 0$;
- sinon (une de chaque couleur) : reçoit 0 € \Rightarrow gain $0 - 1 = -1$.

RÉPONSE

X prend les valeurs -1 , 0 et 2 .

2.b. Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$

$X = -1$ correspond à l'événement \bar{z} une boule rouge et une boule verte \bar{z} , c'est-à-dire $(R_1 \cap \bar{R}_2)$ ou $(\bar{R}_1 \cap R_2)$ (événements incompatibles). Les tirages étant indépendants :

$$P(X = -1) = P(R_1 \cap \bar{R}_2) + P(\bar{R}_1 \cap R_2)$$

$$P(X = -1) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100} + \frac{9}{100} = \frac{18}{100}.$$

RÉPONSE

$$P(X = -1) = \frac{18}{100}.$$

2.c. Loi de probabilité de X

$$P(X = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100},$$

$$P(X = 0) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}.$$

$$\text{Vérification : } \frac{18}{100} + \frac{81}{100} + \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1. \checkmark$$

k	-1	0	2
$P(X = k)$	$\frac{18}{100} = \frac{9}{50}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{1}{100}$

2.d. Espérance de X

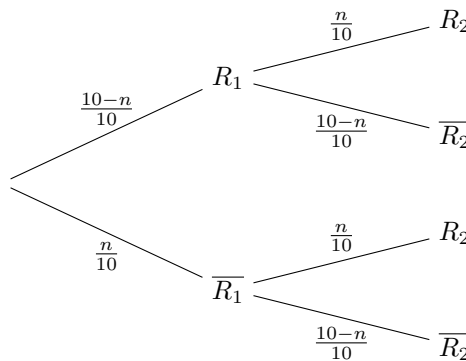
$$E(X) = (-1) \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} = \frac{-18 + 0 + 2}{100} = \frac{-16}{100} = -0,16.$$

RÉPONSE

$E(X) = -0,16$. En moyenne, sur un grand nombre de parties, le joueur **perd 0,16 € par partie** : le jeu est *défavorable au joueur* (et favorable au forain).

Partie B — n boules rouges et $10 - n$ boules vertes

À chaque tirage : $P(R) = \frac{n}{10}$ et $P(\bar{R}) = \frac{10 - n}{10}$.



1. Démontrer que $E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$

MÉTHODE

Y prend les mêmes valeurs que X : 2 (deux rouges), 0 (deux vertes) et -1 (une de chaque). On calcule les probabilités puis l'espérance.

Tirages indépendants :

$$P(Y = 2) = P(R_1 \cap R_2) = \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100},$$

$$P(Y = -1) = P(R_1 \cap \bar{R}_2) + P(\bar{R}_1 \cap R_2) = 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10 - n}{10} = \frac{2n(10 - n)}{100}.$$

$$P(Y = 0) = P(\bar{R}_1 \cap \bar{R}_2) = \left(\frac{10-n}{10}\right)^2 = \frac{(10-n)^2}{100},$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 2 \times P(Y = 2) + 0 \times P(Y = 0) + (-1) \times P(Y = -1) \\ &= 2 \times \frac{n^2}{100} - \frac{2n(10-n)}{100} = \frac{2n^2 - 2n(10-n)}{100} \\ &= \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100} = \frac{4n^2 - 20n}{100}. \end{aligned}$$

RÉPONSE

$$E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

2. Pour combien de boules rouges le jeu est-il équitable ?

RAPPEL DE COURS

Un jeu est *équitable* lorsque le gain moyen est nul : $E(Y) = 0$.

$$\frac{4n^2 - 20n}{100} = 0 \iff 4n^2 - 20n = 0 \iff 4n(n - 5) = 0 \iff n = 0 \text{ ou } n = 5.$$

RÉPONSE

Le jeu est équitable pour $n = 5$ (**urne contenant 5 boules rouges et 5 boules vertes**). La valeur $n = 0$ convient aussi formellement, mais elle correspond à une urne sans boule rouge où tout tirage donne deux vertes (gain toujours nul) : cas dégénéré.

Exercice 2 (4 points)

Partie A — Lecture graphique

RAPPEL DE COURS

Les valeurs ci-dessous sont lues sur le graphique, avec la précision permise par celui-ci.

1. Puissance à 11h00

On lit l'ordonnée de la courbe \mathcal{C}_f pour $x = 11$.

RÉPONSE

À 11h00, la puissance électrique est d'environ 6 kW.

2. Résolution graphique de $f(x) \geq 5$

On cherche les abscisses pour lesquelles la courbe est *située au-dessus* (ou sur) la droite horizontale d'équation $y = 5$. La courbe franchit le niveau 5 vers $x = 10$ en montant, puis repasse en dessous vers $x = 16$.

RÉPONSE

$f(x) \geq 5$ pour $x \in [10; 16]$ environ.

Interprétation : les panneaux fournissent une puissance d'au moins 5 kW approximativement **entre 10h00 et 16h00**.

Partie B — Coût de l'électricité**1. Nature de la suite (c_n)**

Le tarif augmente de 6 % chaque année : on multiplie par $1 + \frac{6}{100} = 1,06$. On passe donc de c_n à c_{n+1} en multipliant par un nombre constant.

RÉPONSE

(c_n) est une suite **géométrique** de raison $q = 1,06$ et de premier terme $c_0 = 0,15$.

2. Expression de c_n **RÉPONSE**

Pour tout entier naturel n : $c_n = c_0 \times q^n$

$$c_n = 0,15 \times 1,06^n$$

3. Coût en 2030

L'année 2030 correspond à $2020 + n$ avec $n = 10$.

RÉPONSE

Le coût pour 1 kWh en 2030 est donné par : $c_{10} = 0,15 \times 1,06^{10}$.

4. Programme Python

a. Dans la boucle, à chaque tour : c est multiplié par 1,06 (coût du kWh) et S reçoit l'économie de l'année ($c \times 2000$).

RÉPONSE

- c représente le **coût d'** 1 kWh (en €) durant l'année $2020 + n$, c'est-à-dire c_n ;
- S représente le **montant cumulé des économies** (en €) réalisées depuis 2020 grâce aux 2000 kWh non achetés chaque année.

b. La boucle se poursuit tant que les économies cumulées S restent inférieures à 7000 (le coût de l'installation). Le programme affiche 16.

RÉPONSE

Il faut **16 ans** pour que les économies cumulées atteignent et dépassent les 7000 € de l'installation : l'investissement est rentabilisé au bout de 16 ans, soit au cours de l'année **2036**.

Exercice 3 (4 points)

$$f(x) = (4x - 4)e^{-0,5x} + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Calcul de $f'(x)$ **MÉTHODE**

Dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, avec $u(x) = 4x - 4$ et $v(x) = e^{-0,5x}$. On rappelle que $(e^{ax})' = a e^{ax}$.

$$u(x) = 4x - 4, \quad u'(x) = 4, \quad v(x) = e^{-0,5x}, \quad v'(x) = -0,5 e^{-0,5x}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4e^{-0,5x} + (4x - 4) \times (-0,5)e^{-0,5x} \\ &= e^{-0,5x} [4 - 0,5(4x - 4)] = e^{-0,5x} [4 - 2x + 2] = (-2x + 6)e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

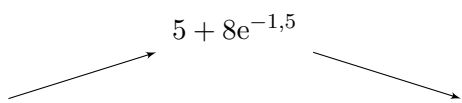
RÉPONSE

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (-2x + 6)e^{-0,5x}$.

2. Signe de $f'(x)$ et variations de f

Pour tout réel x , $e^{-0,5x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-2x + 6$:

$$-2x + 6 \geq 0 \iff x \leq 3.$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-
variation de f	$5 + 8e^{-1,5}$ 		

$$f(3) = (4 \times 3 - 4)e^{-0,5 \times 3} + 5 = 8e^{-1,5} + 5$$

RÉPONSE

f est **strictement croissante sur** $]-\infty ; 3]$ et **strictement décroissante sur** $[3 ; +\infty[$. Elle admet un maximum en $x = 3$, valant $f(3) = 5 + 8e^{-1,5}$.

3. Tangentes horizontales

La tangente à \mathcal{C}_f en un point est horizontale lorsque $f'(x) = 0$. Or $f'(x) = 0 \iff -2x + 6 = 0 \iff x = 3$ (puisque $e^{-0,5x}$ ne s'annule jamais).

$$f(3) = 8e^{-1,5} + 5 \text{ d'après la question précédente.}$$

RÉPONSE

Oui, \mathcal{C}_f admet **un** point à tangente horizontale, de coordonnées exactes :

$$(3 ; 5 + 8e^{-1,5}).$$